Die optimale Positionsgröße

VTAD-Award 2019

Dr. Norman Graf *(email@was7.de)*

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

Zu Beginn jeder Investition muss eine wichtige Entscheidung über die Größenordnung des eingesetzten Kapitals getroffen werden, denn dieses Investitionskapital kann entweder aus dem vollen Eigenkapital, aus einem Anteil des Eigenkapitals oder durch Kreditaufnahme aus Eigenkapital und zusätzlichem Fremdkapital bestehen. Die Größe dieses eingesetzten Kapitals hat einen starken Einfluss auf die Rendite der Investition, deshalb sollte für frei verfügbare Anlagegelder, welche keinen zusätzlichen Beschränkungen unterliegen, eine optimale Positionsgröße für das Investitionskapital berechnet und verwendet werden. Dieser Wert wird mit *optimal f* bezeichnet[1]. Die Positionsgröße f = 1 bedeutet also die Investition des vollen Eigenkapitals ohne zusätzliches Fremdkapital.

Die Verwendung einer Positionsgröße f ≠ 1 wirkt sich direkt auf die erzielbaren Renditen und die Volatilität einer Investition aus. Gewinne und Verluste verringern sich, wenn nur Teile des Eigenkapitals investiert werden, im Gegenzug fallen sie höher aus, wenn durch Kreditaufnahmen fremdes Kapital beteiligt ist. Die Verwendung einer optimalen Positionsgröße ist aufgrund dieser Hebelwirkung von hoher Bedeutung. Wegen der Asymmetrie von Gewinn und Verlust[2] kann das optimal f aber nicht direkt aus den Renditen abgelesen werden.

Bestimmung der optimalen Positionsgröße

Die Grundlage zur Bestimmung der optimalen Positionsgröße bildet die historische Renditeentwicklung der Investition. Alle Einzelrenditen sind gleichwertig und repräsentieren ein Teilergebnis der Gesamtinvestition. Eine hohe Anzahl n an Einzelrenditen R_i berücksichtigt deshalb viele Möglichkeiten an Chancen und Risiken und bestimmt die Genauigkeit bei der Berechnung der optimalen Positionsgröße.

Zur Berechnung der optimalen Positionsgröße wird zuerst das Gesamtergebnis $G = K_n$ bestimmt, welches sich aus einer Verkettung der Einzelrenditen R_i ergibt:

[1] der Name leitet sich aus "optimal fixed fraction" ab, vgl. Vince(2007), S. 117-118

[2] Asymmetrie: ein Verlust wiegt schwerer als ein Gewinn des gleichen Betrages, weil mit einer Positivrendite p nur ein Teil der Negativrendite q $(|p| = |q|)$ ausgeglichen werden kann

$$G = K_n = K_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + R_i)$$

Bei Verwendung einer Positionsgröße $f \neq 1$ setzt sich jeder Kapitalertrag K_i aus den Erträgen des Investitionsanteils f und dem Festgeld- oder Kreditanteil $1 - f$ zusammen. Umformungen der Gleichung zeigen, dass die Positionsgröße f sowohl auf das Kapital, als auch auf die erzielbare Rendite angewendet werden kann.

K_i : Kapitalertrag nach der i-ten Investition

$f \cdot K_{i-1} \cdot (1 + R_i)$: Ertrag aus dem Investitionsanteil der i-ten Investition

$(1 - f) \cdot K_{i-1}$: Festgeld- oder Kreditanteil der i-ten Investition

$$\begin{aligned} K_i &= f \cdot K_{i-1} \cdot (1 + R_i) + (1 - f) \cdot K_{i-1}, \qquad für \;\; 1 \leq i \leq n \\ &= f \cdot K_{i-1} + f \cdot K_{i-1} \cdot R_i + K_{i-1} - f \cdot K_{i-1} \\ &= f \cdot K_{i-1} \cdot R_i + K_{i-1} \\ &= K_{i-1} \cdot (1 + f \cdot R_i) \qquad (I) \end{aligned}$$

Auch bei Einfluss der Kapitalkosten z des Festgeld- oder Kreditanteils ergibt sich die Möglichkeit der wahlweisen Anwendung der Positionsgröße f auf die Einzelrenditen oder auf das eingesetzte Kapital:

$$\begin{aligned} K_i &= f \cdot K_{i-1} \cdot (1 + R_i) + (1 - f) \cdot K_{i-1} \cdot (1 + z), \qquad für \;\; 1 \leq i \leq n \\ &= f \cdot K_{i-1} \cdot (1 + R_i) + (1 - f) \cdot (K_{i-1} + K_{i-1} \cdot z) \\ &= f \cdot K_{i-1} \cdot (R_i - z) + K_{i-1} \cdot (1 + z) \\ &= K_{i-1} \cdot (f \cdot R_i - f \cdot z + z + 1) \\ &= K_{i-1} \cdot (1 + z + f \cdot (R_i - z)) \end{aligned}$$

Es spielt demnach keine Rolle, ob für die Investition verschiedene Kapitalanteile oder gehebelte Finanzinstrumente entsprechend der Positionsgröße f verwendet werden. Will ein Investor beispielweise mit der Positionsgröße $f = 2$ seine Renditen verdoppeln, kann er entweder genauso viel Fremdkapital aufnehmen, wie er Eigenkapital hat, oder ein Finanzinstrument mit zweifachem Hebel auf den gewünschten Basiswert verwenden. In der Regel wird sich der Investor für die gehebelte Variante entscheiden, weil die Kapitalkosten von Finanzinstrumenten meist deutlich geringer als diejenigen von Krediten sind.

Die Möglichkeit der Verwendung von gehebelten Renditen wird außerdem bei der Berechnung von optimal f genutzt, wenn die rekursive Berechnung des Gesamtergebnisses in eine explizite Darstellung umgeformt wird. Dann kann das Gesamtergebnis $G = K_n$ direkt aus dem Startkapital K_0, der Positionsgröße f und den erzielten Renditen R_i, ohne Kenntnis der Zwischenergebnisse K_i abgeleitet werden, denn aus der Beziehung (I) folgt

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + f \cdot R_1) \qquad \text{und}$$

$$K_n = K_{n-1} \cdot (1 + f \cdot R_n) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow K_n = K_0 \cdot (1 + f \cdot R_1) \cdot \ldots \cdot (1 + f \cdot R_{n-1}) \cdot (1 + f \cdot R_n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$= K_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + f \cdot R_i)$$

Das Ziel ist die Maximierung des Gesamtergebnisses bezüglich der Positionsgröße f. Dafür ist die alternative Verwendung der Positionsgröße f als Renditehebel von großem Vorteil, weil das Produkt

$$K_n = K_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + f \cdot R_i)$$

ein Polynom vom Grad n mit den Nullstellen $f_i = -\frac{1}{R_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ bildet. Die Lösungen des Optimierungsproblems

$$\max_{f} K_n = K_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + f \cdot R_i)$$

bezeichnen deshalb die Werte für das gesuchte $optimal\,f$ und können über eine Extremwertbestimmung gefunden werden. Dabei sind nicht alle Lösungen für optimal f relevant, lediglich die nichtnegativen[3] lokalen Maxima des Polynoms kommen für eine praktische Anwendung in Frage.

Nebenbedingungen für die Lösung des Optimierungsproblems

Die Nebenbedingungen für die Suche nach optimal f leiten sich aus den praktischen Bedingungen bei Investitionen ab. Somit ergibt sich die zulässige Lösungsmenge für die optimale Positionsgröße aus den Wertebereichen der Investitionsparameter.

Erstens wird angenommen, dass der Investor eine normale Risikopräferenz aufweist und nach Möglichkeit hohe Risiken ablehnt. Das bedeutet, dass ein optimal f mit schlechter Performance (Risiko-Renditeverhältnis) als Lösung akzeptiert, aber bei Existenz einer Lösung mit besserer Performance verworfen wird.

Außerdem wird davon ausgegangen, dass der Investor bereits eine Vorauswahl der Wertpapiere getroffen hat und keine Leerverkäufe tätigt. Optimal f wird deshalb für eine long-Position berechnet.

Es ist klar, dass der Investor von seiner Strategie bereits vor der Berechnung der optimalen Positionsgröße ein positives Gesamtergebnis erwartet. Damit wird die Investition in das entsprechende Wertpapier überhaupt erst begründet. Diese Erwartung wird im Folgenden als *positiver Trend* definiert. Es entfallen deshalb alle negativen Lösungen für optimal f aus mathematischer Folgerung, womit auch sichergestellt wird, dass die Investitionsposition unverändert bleibt. Die Lösung optimal f = 0 entfällt ebenfalls, weil diese Lösung trivial ist und dem Ergebnis einer Nichtinvestition entspricht.

Definition: positiver Trend

Eine Investition zeigt genau dann einen positiven Trend, wenn die Verkettung der Einzelrenditen R_i größer als 1 ist.

$$positiver\ Trend \iff Gesamtergebnis\ G = \prod_{i=1}^{n}(1 + R_i) > 1$$

[3] Die Positionsgröße sollte größer als Null sein.

Folgerung:

Für Investitionen mit positivem Trend gilt: optimal f > 0

Ein Beweis der Folgerung findet sich im Kapitel „Wo liegt optimal f ?“. Die historischen Renditen sollten vorrangig dem eingesetzten Finanzinstrument entnommen werden und nur bei ungenügender Länge der Historie per Berechnung aus den Kursen des Basiswertes generiert werden.

Investitionen mit ausschließlich positiven oder negativen historischen Einzelrenditen entfallen ebenfalls, weil hier keine Berechnung von optimal f notwendig ist. Beispielsweise ergibt sich für eine Kette ausschließlich positiver Einzelrenditen immer ein optimal f = ∞, weil eine solche Historie keinerlei Risikopotential erkennen lässt.

Außerdem ist die Wahl eines möglichst kleinen optimal f notwendig, weil mit zunehmendem f auch die Volatilität der Geldanlage steigt, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird. Bei einer hohen Positionsgröße besteht dann ein großes Risiko für einen Totalverlust während des Anlagezeitraumes. Der Investor ist also bei mehreren verschiedenen Lösungen am kleinstmöglichen positiven optimal f interessiert.

Insgesamt ergeben sich damit folgende Nebenbedingungen für die Optimierungsaufgabe:

1. Eine Historie beinhaltet mindestens eine positive und eine negative Einzelrendite $R_i,\ i \in \mathbb{N}$.

   $$\Rightarrow \min_i(R_i) < 0 \ \mathit{und} \ \max_i(R_i) > 0, \qquad i \geq 2$$

2. Die Investition zeigt einen positiven Trend, welcher bei Einstieg nach n Investitionen die long Position rechtfertigt.

   $$G = \prod_{i=1}^{n}(1 + R_i) > 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Auch bei der Verwendung einer Positionsgröße $f \neq 1$ ist höchstens ein Totalverlust möglich.

   $$\Rightarrow f \cdot R_i \geq -1 \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$$

4. Alle Investitionen sind long, es findet also immer ein Kauf der Wertpapiere statt. Leerverkäufe sind nicht zugelassen.

   $\Rightarrow \; f > 0$

5. Wegen des Einflusses auf die Volatilität wird das kleinstmögliche positive optimal f gesucht.

Eigenschaften von Investitionen mit variablen Positionsgrößen

Eine wichtige Eigenschaft von Investitionen mit variablen Positionsgrößen ist der Einfluss der Positionsgröße auf die Volatilität. Die Volatilität entwickelt sich direkt proportional zur Positionsgröße f, so dass mit einer Absenkung der Positionsgröße die Volatilität verringert werden kann.

Die allgemeine Formel für die historische Volatilität, also die Standardabweichung s aus den Renditeergebnissen R_i der Vergangenheit, lautet:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i \right)^2}$$

Bei Verwendung einer Positionsgröße f ergibt sich

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(f \cdot R_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f \cdot R_i \right)^2}$$

$$= f \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (R_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i))^2}$$

$$= f \cdot s$$

Bei Einsatz größerer Hebel muss der Investor größere Risiken akzeptieren. Die Veränderung der Risikomerkmale einer Investition unter Verwendung von optimal f sollte ein Investor unbedingt berücksichtigen.

Die Positionsgröße f hat weiterhin Einfluss auf das asymmetrische Verhältnis von Gewinn zu Verlust. Damit ist gemeint, dass der Betrag einer Negativrendite q nur mit einer größeren Positivrendite p kompensiert werden kann. Diesen Ausgleich beschreibt die Beziehung

$$(1+p)\cdot(1-q)=1,\ \ mit\ \ p,q>0$$

$$\Rightarrow\ \ q=1-\tfrac{1}{1+p}<\ p$$

Bei Verwendung einer Positionsgröße f ändert sich das Verhältnis zu

$$f\cdot q_f=1-\frac{1}{1+f\cdot p}$$

$$\Rightarrow q_f=\frac{p}{1+f\cdot p}$$

Frage: Für welche Positionsgrößen f gilt $q_f>q$, sodass eine größere Negativrendite kompensiert werden kann?

Annahme: $q_f=\frac{p}{1+f\cdot p}>\frac{p}{1+p}=q$

Weil $p>0$ ist, muss folgende Relation gelten:

$$1+f\cdot p\ <\ 1+p$$

$$\Rightarrow\ f\cdot p\ <\ p$$

$$\Rightarrow\ \ \ f\ <\ 1$$

Die Stärke der Asymmetrie zwischen positiver und negativer Rendite verringert sich demnach für $0\le f<1$ und nimmt für $f>1$ zu.

Wo liegt optimal f ?

Frage: Liegt eine Lösung des Optimierungsproblems in der Umgebung des Nullpunktes?

Wir betrachten dazu die kleinstmögliche Historie aus den zwei Einzelrenditen R_1 und R_2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$ (Nebenbedingung 1).

$$Gesamtergebnis\ G(f) = (1 + f \cdot R_1) \cdot (1 + f \cdot R_2)$$

Durch Ausklammern von R_1 und R_2 ergeben sich die Nullstellen f_a und f_b von $G(f)$:

$$G(f) = (1 + f \cdot R_1) \cdot (1 + f \cdot R_2) = R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + f\right) \cdot R_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + f\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_a = -\frac{1}{R_1} \quad , \quad f_b = \frac{1}{|R_2|}$$

Bemerkung: Allgemein sind die zum Nullpunkt nächstliegende negative und die zum Nullpunkt nächstliegende positive Nullstelle des Polynoms $G(f)$:

$$f_a = -\frac{1}{\max\limits_i(R_i)} \quad , \quad f_b = \frac{1}{\left|\min\limits_i(R_i)\right|}$$

Existenz: Nach dem Satz von Rolle[4] hat die Gleichung $G'(f) = 0$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden reellen Lösungen der Gleichung $G(f) = 0$ wenigstens eine reelle Wurzel. Die Werte $f_a = -\frac{1}{max(R_1, R_2)} = -\frac{1}{R_1}$ und $f_b = \frac{1}{|min(R_1, R_2)|} = \frac{1}{|R_2|}$ sind zwei aufeinanderfolgende Wurzeln der Gleichung $G(f) = 0$, demnach muss eine Lösung der Gleichung $G'(f) = 0$ und damit ein Extrempunkt des Polynoms $G(f)$ im Intervall $\left(-\frac{1}{R_1}, \frac{1}{|R_2|}\right)$ liegen.

Zur Bestimmung der Art des Extrempunktes wird die zweite Ableitung von $G(f)$ betrachtet:

$$G'(f) = R_1 \cdot (1 + f \cdot R_2) + R_2 \cdot (1 + f \cdot R_1)$$

[4] vgl. Obreschkoff (1963), S. 2 - 4

$$G''(f) = 2 \cdot R_1 \cdot R_2 < 0$$

$$\Longrightarrow \; Lösung\ von\ G'(f) = 0\ ist\ immer\ Maximum$$

Das Polynom $G(f)$ hat demnach für zwei Einzelrenditen $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$ immer ein Maximum im Intervall $\left(-\frac{1}{R_1}, \frac{1}{|R_2|}\right)$. Werden nun weitere Renditen in die Historie aufgenommen, kann sich die Art des Extrempunktes nur ändern, wenn einer der Faktoren $(1 + f \cdot R_i) < 0$ ist und damit alle bisherigen positiven Amplituden negativ werden. Dieser Fall ist aber durch die Nebenbedingung 2 bereits ausgeschlossen. Diese Folgerung kann leicht nachvollzogen werden:

Das Polynom $G(f)$ habe zwischen den Nullstellen a und b eine positive Amplitude, es gilt also für alle $f^* \in (a, b)$, dass $G(f^*) > 0$. Dann ergibt sich nach Hinzunahme einer neuen Einzelrendite R_{neu} das Gesamtergebnis $G_{neu}(f) = G(f) \cdot (1 + f \cdot R_{neu})$. Weil nach Nebenbedingung 2 gilt, dass $f \cdot R_{neu} \geq -1$, folgt $1 + f \cdot R_{neu} \geq 0$ und damit $G_{neu}(f^*) > 0 \;\forall\; f^* \in (a, b)$.

$$\Rightarrow eine\ Lösung\ der\ Optimierungsaufgabe\ liegt\ immer\ im\ Intervall\ \left(-\frac{1}{max\, R_i}, \frac{1}{|min\, R_i|}\right)$$

Wir betrachten wieder das Polynom $G(f)$ aus den zwei Einzelrenditen R_1 und R_2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$.

Wie schon festgestellt wurde, beschreibt die Nebenbedingung 2 den Ausgleich der Negativrenditen durch die Positivrenditen unter Beachtung der asymmetrischen Gewinnverteilung. Eine einfache Folgerung ist deshalb das Verhältnis

$$R_1 > |R_2| \ ,$$

denn es gilt

$$1 < (1 + R_1) \cdot (1 + R_2) \qquad (nach\ Nebenbed.\ 2)$$

$$\Longrightarrow \; 1 < R_1 R_2 + R_1 + R_2 + 1$$

$$\Rightarrow R_1 > -\frac{R_2}{1 + R_2} \qquad (nach\ Nebenbed.\ 3)$$

$$\Rightarrow R_1 > \frac{|R_2|}{1 + R_2} > |R_2| \qquad (-1 < R_2 < 0)$$

Aus dieser Tatsache folgt sofort die Nebenbedingung 4 ($f > 0$), denn es gilt

$$G'(f) = R_1 \cdot (1 + f \cdot R_2) + R_2 \cdot (1 + f \cdot R_1)$$

Das Maximum von $G(f)$ wird bei

$$0 = R_1 \cdot (1 + f \cdot R_2) + R_2 \cdot (1 + f \cdot R_1)$$

$$0 = R_1 + 2 \cdot f \cdot R_1 R_2 + R_2$$

$$f = \frac{-R_2 - R_1}{2 \cdot R_1 R_2} = \frac{|R_2| - R_1}{2 \cdot R_1 R_2}$$

erreicht. Wegen $R_1 > |R_2|$, $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$ folgt nun

$$|R_2| - R_1 < 0 \quad und \quad 2 \cdot R_1 R_2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{|R_2| - R_1}{2 \cdot R_1 R_2} > 0$$

$$\Rightarrow optimal\ f > 0$$

Damit kann der Definitionsbereich für f weiter verkleinert werden. Die optimale Positionsgröße liegt also im Intervall $\left(0, \frac{1}{|min\, R_i|}\right)$.

Anwendungsbeispiel

Gegeben seien die Renditen

$R_1 = -0{,}0417$, $R_2 = 0{,}276$, $R_3 = -0{,}0432$, $R_4 = 0{,}0545$, $R_5 = 0{,}0344$, $R_6 = 0{,}0098$, $R_7 = -0{,}0245$ und $R_8 = -0{,}109$.

Das Startkapital sei $K_0 = 1$.

Das Optimierungsproblem lautet also

$$\max_{f} K_8 = \prod_{i=1}^{8} (1 + f \cdot R_i)$$

Wir bilden das Polynom

$$y = (1 - f \cdot 0{,}0417) \cdot (1 + f \cdot 0{,}276) \cdot (1 - f \cdot 0{,}0432) \cdot (1 + f \cdot 0{,}0545) \cdot$$
$$(1 + f \cdot 0{,}0344) \cdot (1 + f \cdot 0{,}0098) \cdot (1 - f \cdot 0{,}0245) \cdot (1 - f \cdot 0{,}109)$$

Die erste Ableitung von y nach f lautet dann

$$y' = 1{,}9516^{-10} \cdot f^7 + 9{,}5565^{-9} \cdot f^6 - 8{,}2966^{-7} \cdot f^5 - 5{,}228^{-6} \cdot f^4 + 5{,}5703^{-4} \cdot f^3 -$$
$$9{,}5283^{-4} \cdot f^2 - 0{,}072 \cdot f + 0{,}1563$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung, also die Lösungen von $y' = 0$, sind

$f_1^0 = 2{,}1836$

$f_2^0 = 15{,}2204$

$f_3^0 = 23{,}5731$

$f_4^0 = 36{,}8486$

$f_5^0 = -12{,}3065 \qquad (entfällt\ nach\ Nebenbed.\ 4)$

$f_6^0 = -25{,}2657 \qquad (entfällt\ nach\ Nebenbed.\ 4)$

$f_7^0 = -89{,}2209 \qquad (entfällt\ nach\ Nebenbed.\ 4)$

Die zweite Ableitung von y nach f lautet

$$y'' = 1{,}3661^{-9} \cdot f^6 + 5{,}7339^{-8} \cdot f^5 - 4{,}1483^{-6} \cdot f^4 - 2{,}0912^{-5} \cdot f^3 +$$
$$1{,}6711^{-3} \cdot f^2 - 0{,}0019 \cdot f - 0{,}0721$$

Die Art der lokalen Extremstelle wird durch Einsetzen der Nullstellen der ersten Ableitung in die zweite Ableitung ermittelt.

$y''(f_1^0) = -0{,}0686 \rightarrow lokales\ Maximum$

$y''(f_2^0) = 0{,}0535 \rightarrow lokales\ Minimum$

$y''(f_3^0) = -0{,}0915 \rightarrow lokales\ Maximum$

$y''(f_4^0) = 0{,}7477 \rightarrow lokales\ Minimum$

Ein optimales Gesamtergebnis wird also bei der Verwendung von $optimal\ f = 2{,}1836$ oder von $optimal\ f = 23{,}5731$ erzielt. Nach Nebenbedingung 5 und aus dem direkten Vergleich der Gesamtergebnisse ergibt sich $optimal\ f = 2{,}1836$ für den gegebenen Renditeverlauf.

$$K_8^1 = \prod_{i=1}^{8} (1 + 2{,}1836 \cdot R_i) = 1{,}1692$$

$$K_8^3 = \prod_{i=1}^{8} (1 + 23{,}5731 \cdot R_i) = 0{,}0079$$

Dies zeigt sich auch in der grafischen Betrachtung der Gesamtergebnisse für optimal f im Intervall [0, 30].

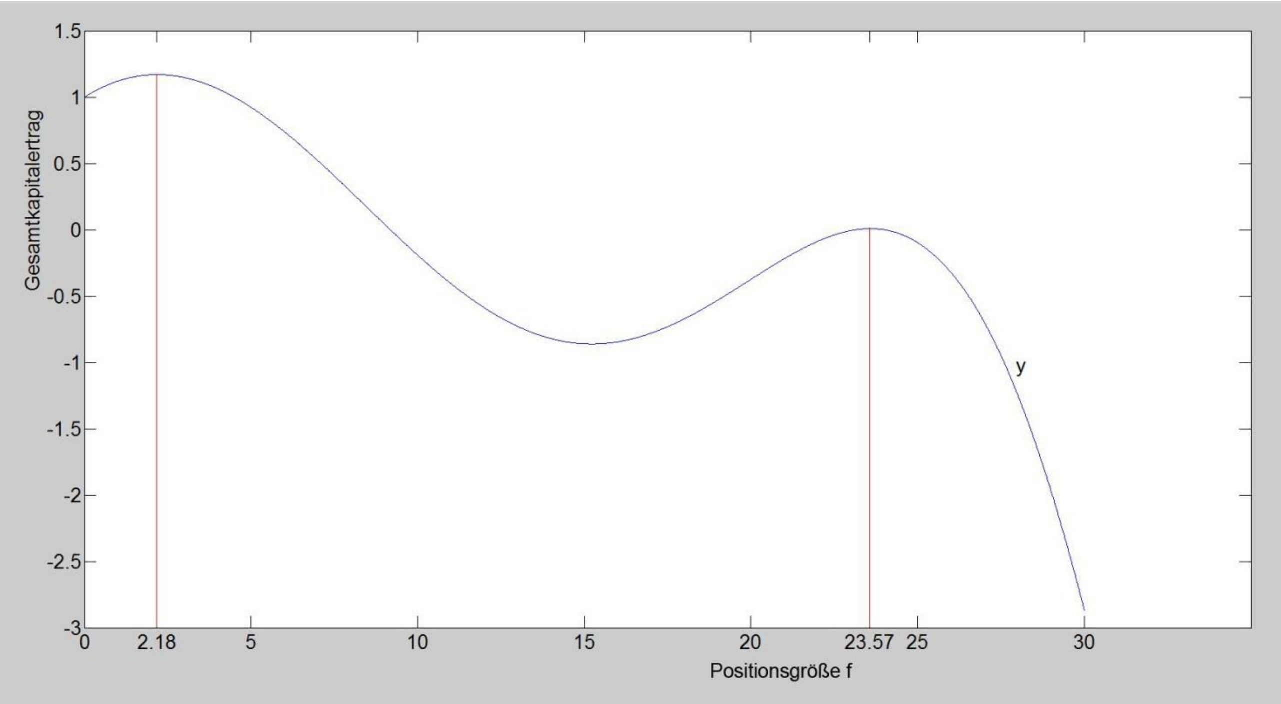

Abbildung 1: Gesamtergebnis der Investition bei versch. Positionsgrößen im Intervall [0, 30]

Ohne die Verwendung einer optimalen Positionsgröße wäre lediglich ein Ergebnis von 1,1201, also fast 5% weniger Rendite, erzielt worden.

$$K_8 = \prod_{i=1}^{8} \cdot (1 + R_i) = 1{,}1201$$

Andererseits kann eine schlecht gewählte Positionsgröße auch Renditeverluste erzeugen, sodass ohne Gedanken über eine mögliche Aufteilung ein besseres Ergebnis erzielt würde. Die folgende Tabelle zeigt die genauen Gesamtergebnisse und die Volatilität für verschiedene f im Intervall [0, 3].

Positionsgröße f	**Gesamtergebnis**	**Volatilität**
0	**1**	**0**
0,25	1,0368	0,0289
0,5	1,0691	0,0578
0,75	1,0969	0,0867
1	**1,1201**	**0,1155**
1,25	1,1388	0,1444
1,5	1,153	0,1733
1,75	1,1627	0,2022
2	1,1681	0,2311
2,18	**1,1692**	**0,2519**
2,25	1,1691	0,26
2,5	1,1658	0,2889
2,75	1,1584	0,3178
3	1,1469	0,3466

Tabelle 1: Gesamtergebnis und Volatilität der Investition bei verschiedenen Positionsgrößen im Intervall [0, 3]

Bei Einsatz größerer Hebel als 1 muss der Investor auch größere Risiken akzeptieren. Die kleinste Rendite des Beispiels ist $R_8 = -0{,}109$. Durch den Einsatz von optimal f wäre deshalb eine Einzelrendite von $R_8^1 = -0{,}238$, also ein Verlust von beinahe 24% entstanden. Die Veränderung der Risikomerkmale einer Investition unter Verwendung von optimal f sollte der Investor unbedingt berücksichtigen.

Vergleich mit der Berechnungsmethode nach Ralph Vince

An dieser Stelle lohnt sich ein Vergleich zur Methode von Ralph Vince. In „The Handbook of Portfolio Mathematics“ zeigt er die Vorgehensweise zur Berechnung von optimal f. Dabei werden sogar verschiedene Methoden verwendet, diese beziehen sich aber alle auf den Prozess der Nullstellensuche des Polynoms K_n.

Ausgangspunkt zur Bildung von K_n sind immer die absoluten Erträge der Investitionen. Später werden wir sehen, dass diese Erträge letztendlich auch in Renditen umgerechnet werden, wobei Vince diese als Ausgleichsdaten[5] bezeichnet und zur Berechnung ein Ausgangskapital in Höhe des größten Verlustes verwendet. Das folgende Beispiel soll die Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Methoden verdeutlichen, die Bemerkung RV kennzeichnet die Schritte nach der Methode von R. Vince.

Bsp. Berechnung von optimal f mit verschiedenen Methoden

Erträge: $E(1) = 2,\ \ E(2) = -3,\ \ E(3) = 10,\ \ E(4) = -5$

1. Berechnung mit aktueller Methode (Renditemethode, $optimal\ f_R$)

Ausgangskapital willkürlich gewählt: $K(0) = 100$

$$\Rightarrow\ Kapital\ K(i) = K(0) + \sum_{j=1}^{i} E(j) : K(1) = 102,\ \ K(2) = 99,\ \ K(3) = 109,\ \ K(4) = 104$$

$$\Rightarrow\ Renditen\ R(i) = \left(\frac{E(i)}{K(i-1)}\right): R(1) = 0.02,\ \ R(2) = -0.03,\ \ R(3) = 0.1,\ \ R(4) = -0.05$$

$$\Rightarrow\ K_4 = (1 + f \cdot 0.02)(1 - f \cdot 0.03)(1 + f \cdot 0.1)(1 - f \cdot 0.05)$$

$$\Rightarrow\ optimal\ f_R = 3.37$$

Die Verwendung von Renditen zur Berechnung der optimalen Positionsgröße (Renditemethode) ergibt einen Faktor, hier $optimal\ f_R = 3.37$, welcher direkt auf das einzusetzende Kapital bezogen werden kann. Im Beispiel sollte also das 3,37-fache des Ausgangskapitals investiert werden. Dieser

[5] vgl. Vince(2007), S. 151

Wert wird entweder mit zusätzlichem Fremdkapital, über entsprechend gehebelte Finanzinstrumente oder eine Mischung aus beiden erreicht.

Bsp. Anwendung des berechneten optimal f nach der Renditemethode

Ausgangskapital: 100, $optimal\ f_R = 3.37$

$\Longrightarrow$ benötigtes Ausgangskapital: 337

1. Möglichkeit: Aufnahme von Fremdkapital in Höhe von 237, Investition in den Basiswert

2. Möglichkeit: Markt bietet beispielsweise Finanzinstrumente zum Basiswert mit Hebel 4

Investition von $\frac{337}{4} = 84{,}25$ in diese Finanzinstrumente

3. Möglichkeit: Markt bietet nur Finanzinstrumente zum Basiswert mit höchstens Hebel 2

Aufnahme von Fremdkapital in Höhe von 68,50

Investition von $\frac{337}{2} = 168{,}50$ in diese Finanzinstrumente

2. Berechnung nach der Methode von R. Vince[6] (Ertragsmethode, $optimal\ f_E$)

Berechnung der Holding Period Returns (HPR_i):

$$HPR_i = 1 - f \cdot \frac{Ertrag_i}{größter\ Verlust}$$

$$HPR_1 = 1 - f \cdot \frac{2}{-5} = 1 + f \cdot 0.4$$

$$HPR_2 = 1 - f \cdot \frac{-3}{-5} = 1 - f \cdot 0.6$$

$$HPR_3 = 1 - f \cdot \frac{10}{-5} = 1 + f \cdot 2$$

$$HPR_4 = 1 - f \cdot \frac{-5}{-5} = 1 - f$$

[6] vgl. Vince(2007), S. 122 ff.

Berechnung der Terminal Wealth Relative (TWR):

$$\Rightarrow TWR = (1 + f \cdot 0.4) \cdot (1 - f \cdot 0.6) \cdot (1 + f \cdot 2) \cdot (1 - f)$$

$$\Rightarrow optimal\ f_E = 0.17$$

R. Vince verwendet statt Renditen die absoluten Erträge zur Berechnung der optimalen Positionsgröße. Das so ermittelte optimal f kann dann nicht direkt auf das Ausgangskapital angewendet werden. Hier ist ein zusätzlicher Schritt notwendig, welcher optimal f in Bezug zum Kapital setzt:

Bsp. Anwendung des berechneten optimal f nach der Ertragsmethode

RV

Ausgangskapital: 100, $optimal\ f_E = 0.17$

Preis eines Wertpapiers des Basiswertes, willkürlich gewählt: 55

Berechnung der Anteile: $f\$ = \frac{größter\ Verlust\ in\ \% \cdot Anteilswert}{-f} = \frac{-0.05 \cdot 55}{-0.17} = 16.18$

Für je 16,18 des Ausgangskapitals kann also 1 Anteil zu 55 gekauft werden.

$\Rightarrow$ es können $\frac{100}{16.18} = 6.18$ Anteile zu je 55 gekauft, also insgesamt 340 investiert werden, die Abweichung zu 337 entsteht aus Rundungsfehlern, die Renditemethode ist hier genauer.

Damit wird ersichtlich, dass die optimale Positionsgröße der Renditemethode praktisch besser verwendbar ist. Erstens entfällt die Umrechnung in Anteile, welche zu den verschiedenen Zeitpunkten der Historie sogar unterschiedliche Preise hatten und alle einzeln zu berücksichtigen sind.[7] Außerdem ist für $optimal\ f_R$ ein größeres Intervall als [0,1] zulässig, sodass dieser Wert bei gleicher Dezimaldarstellung genauer ist.

Nachdem ein Zusammenhang zwischen den verschiedenen Methoden zur Bestimmung von optimal f gezeigt wurde, stellt sich die Frage, für welches Ausgangskapital die Renditemethode ebenfalls eine Positionsgröße von 0,17 ermittelt, welche damit dem Ergebnis von R. Vince entspricht. In diesem Fall würde die Berechnung der Anteile entfallen. Gesucht ist also die Lösung von

[7] vgl. Vince (2007), S. 151 ff.

$$K_4(x) = \left(1 + f \cdot \tfrac{2}{x}\right)\left(1 - f \cdot \tfrac{3}{x}\right)\left(1 + f \cdot \tfrac{10}{x}\right)\left(1 - f \cdot \tfrac{5}{x}\right) \; mit\ optimal\ f_R = 0.17$$

$$\Rightarrow \quad x = -5 = größter\ Verlust$$

Die Ertragsmethode kann also auch so interpretiert werden, dass sie der Renditemethode mit einem Ausgangskapital in Höhe des größten Verlustes entspricht. Dennoch wird auch hier im Anschluss die Umrechnung auf die Anteile vorgenommen. Damit zeigt sich, dass die Renditemethode realistischer ist, weil der größte Verlust auch schon im ersten Handel eintreten kann und das Ausgangskapital komplett vernichten würde. Weitere Erträge könnten dann gar nicht mehr entstehen. Dieser Aspekt kann zwar für die Berechnung von optimal f vernachlässigt werden, wenn der größte Verlust wegen der Kommutativität der HPR_i auf einen späteren Zeitpunkt verschoben wird, allerdings entspricht die Reihenfolge der Erträge nun nicht mehr der Wirklichkeit. Dies ist bei weiteren Berechnungen unbedingt zu berücksichtigen.

Im Grunde funktioniert die Ertragsmethode wie eine Renditemethode, denn die Positionsgröße der Ertragsmethode (im Beispiel: 0.17) kann auch ohne Kenntnis der Wertpapierpreise in die Positionsgröße der Renditemethode umgerechnet werden:

$$f_R = \frac{Kapital}{\dfrac{größter\ Verlust\ in\ \% \cdot Anteilswert}{-f_E}} \cdot Anteilswert = \frac{Kapital * f_E}{|größter\ Verlust\ in\ \%|}$$

$$im\ Beispiel\ (mit\ Kapital = 1){:}\ \ f_R = \frac{f_E}{0.05} = \frac{0.17}{0.05} = 3.4$$

Der Unterschied beider Verfahren liegt in den verwendeten Eingangsgrößen. Neue Renditen sind unabhängig von historischen Ergebnissen, neue Erträge müssen aber auf das eingesetzte Kapital bezogen werden. Dadurch entstehen oft große Abweichungen, welche die optimale Positionsgröße verfälschen können. Dann wird in Abhängigkeit von den Erträgen das optimal f entweder unter- oder überschätzt.

Bsp. Unterschätzung von optimal f_R bei Verwendung der Ertragsmethode

Erträge: $E(1) = 10,\ \ E(2) = -8,\ \ E(3) = -6.5,\ \ E(4) = 9$

1. Berechnung mit aktueller Methode

Ausgangskapital willkürlich gewählt: $K(0) = 100$

$\Longrightarrow$ Kapital: $K(1) = 110,\ \ K(2) = 102,\ \ K(3) = 95.5,\ \ K(4) = 104.5$

$\Longrightarrow$ Renditen: $R(1) = 0.1,\ \ R(2) = -0.073,\ \ R(3) = -0.064,\ \ R(4) = 0.094$

$\Longrightarrow\ K_4 = (1 + f \cdot 0.1)(1 - f \cdot 0.073)(1 - f \cdot 0.064)(1 + f \cdot 0.094)$

$\Longrightarrow\ optimal\ f_R = 2.17$

2. Berechnung nach der Methode von R. Vince

$$HPR_1 = 1 - f \cdot \tfrac{10}{-8} = 1 + f \cdot 1.25$$

$$HPR_2 = 1 - f \cdot \tfrac{-8}{-8} = 1 - f$$

$$HPR_3 = 1 - f \cdot \tfrac{-6.5}{-8} = 1 - f \cdot 0.81$$

$$HPR_4 = 1 - f \cdot \tfrac{9}{-8} = 1 + f \cdot 1.13$$

$$\Longrightarrow\ TWR = (1 + f \cdot 1.25) \cdot (1 - f) \cdot (1 - f \cdot 0.81) \cdot (1 + f \cdot 1.13)$$

$$\Longrightarrow optimal\ f_E = 0.13$$

$$\Longrightarrow optimal\ f_R = \frac{0.13}{0.08} = 1.63 < 2.17$$

$$\frac{f_R}{f_E} = \frac{1.63}{2.17} = 0.75$$

Die optimale Positionsgröße nach Vince beträgt also nur ein Dreiviertel des optimal f der Renditemethode und unterschätzt dieses um 25%.

Bsp. Überschätzung von optimal f_R bei Verwendung der Ertragsmethode

Erfolgreiche Portfolios haben oft viele kleine Verluste und wenige große Gewinne. Gerade in solchen Fällen wird die optimale Positionsgröße mit der Ertragsmethode überschätzt.

Erträge: $E(1) = -2,\ \ E(2) = -3,\ \ E(3) = -2.5,\ \ E(4) = -3,\ \ E(5) = -2,\ \ E(6) = -2.5$

$E(7) = -1, E(8) = -2.5, E(9) = -3, E(10) = -7, E(11) = 20, E(12) = 50, E(13) = 13$

1. Berechnung mit herkömmlicher Methode

Ausgangskapital willkürlich gewählt: $K(0) = 100$

$\Longrightarrow\ optimal\ f_R = 3.54$

2. Berechnung nach der Methode von R. Vince

$\Longrightarrow\ optimal\ f_E = 0.31$

$$\Longrightarrow\ optimal\ f_R = \frac{0.31}{0.07} = 4.43 > 3.54$$

$$\frac{f_R}{f_E} = \frac{4.43}{3.54} = \ 1.25$$

Die optimale Positionsgröße nach Vince beträgt also $1\frac{1}{4}$ des optimal f der Renditemethode und überschätzt dieses um 25%.

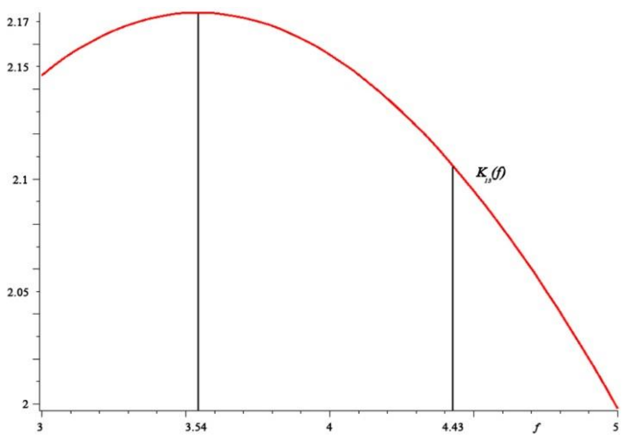

Abbildung 2: Gesamtergebnis der optimalen Positionsgrößen beider Berechnungsmethoden

Zusammenfassung

Die Positionsgröße des Investitionskapitals ist ein sehr wichtiges Kriterium bei Anlageentscheidungen, weil sich dieser Wert direkt auf die erzielbaren Renditen und die Volatilität einer Investition auswirkt. Die Bestimmung einer optimalen Positionsgröße ist von großer Bedeutung für das Gesamtergebnis, weil eine Vernachlässigung oder schlecht gewählte Positionsgrößen Renditeverluste verursachen.

Die Grundlage zur Bestimmung der optimalen Positionsgröße $(optimal\ f)$ bildet die historische Renditeentwicklung der Investition. Das Ziel ist die Maximierung des Gesamtergebnisses bezüglich der Positionsgröße f. Die Lösungen dieses Optimierungsproblems bezeichnen die Werte für das gesuchte $optimal\ f$ und können über eine Extremwertbestimmung gefunden werden. Die optimale Positionsgröße liegt dann im Intervall $\left(0, \frac{1}{|min\ R_i|}\right)$.

Ältere Berechnungsmethoden nach der Ertragsmethode sollten nicht mehr verwendet werden, weil dabei ungenaue Ergebnisse für $optimal\ f$ entstehen können. Die beste Positionsgröße kann demnach unter- oder überschätzt werden, was ebenfalls zu Renditeverlusten führt.

Bei Einsatz größerer Hebel als 1 muss der Investor auch größere Risiken akzeptieren. Die Veränderung der Risikomerkmale einer Investition unter Verwendung von optimal f sollte der Investor unbedingt berücksichtigen.

Für die praktische Anwendung spielt es keine Rolle, ob verschiedene Kapitalanteile oder gehebelte Finanzinstrumente entsprechend der Positionsgröße f verwendet werden.

Literatur

Obreškov, N., Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome (1963), Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin

Tharp, V., Clever Traden mit System (2002), Finanzbuchverlag, München

Tharp, V., Beruf: Trader (2007), Finanzbuchverlag, München

Tharp, V., Definitive Guide To Position Sizing (2008), International Institute of Trading Mastery, Cary (North Carolina)

Vince, R., The Mathematics of Money Management: Risk Analysis Techniques for Traders (1992), John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey

Vince, R., The New Money Management: A Framework for Asset Allocation (1995), John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey

Vince, R., The Handbook of Portfolio Mathematics (2007), John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey

Vince, R., The Leverage Space Trading Model (2009), John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey